

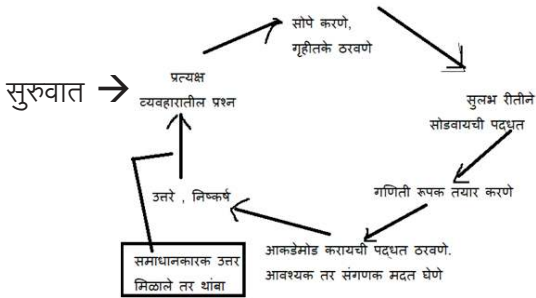


सृष्टिज्ञान : नोव्हेंबर-डिसेंबर २०२३/दिवाळी अंक

लावण्यासाठी असलेला प्रती चौ.मी. दर माहीत करून घेणे जरूरीचे. रंगाचा प्रकार ठरला आणि क्षेत्रफळ मिळाली की एकूण खर्चाचा अंदाज काढता येईल. अर्थात प्रत्येकानेच ही सर्व प्रक्रिया अनुभवली आहे. आवश्यक तो विचार केला आहे. आणि आता वेगवेगळ्या आकारमानांच्या खोल्यांना रंग लावण्याचा अंदाज कसा बांधायचा यासाठी एक पायरी-पायरीने पुढे जायची पद्धत आपण तयार केली. अर्थात आपण खोलीला रंग लावण्यासाठी उपयुक्त गणिती रूपक तयार केले!

अहो भाऊ, पण गणिती रूपक म्हणजे काय हो? साध्या सोप्या शब्दात सांगायचे तर व्यवहारातील प्रश्न गणिताच्या सहाय्याने सोडवणे, त्यासाठीची पद्धत निश्चित करणे आणि गणिताचे उत्तर काढल्यानंतर ते वस्तुस्थितीशी पडताळून बघणे म्हणजे गणिती रूपकाद्वारे प्रश्न सोडवणे.

खालील आकृतीत गणिती रूपकाचे ओघ पत्रक दिले आहे.



सहसा व्यवहारात गुंतागुंत असते मग त्यातील आपल्यासाठी महत्वाची गोष्ट कोणती? त्यानुसार आनुषंगिक कमी महत्वाच्या बाबी वगळणे ही पहिली पायरी उदा. रंग कामाच्या बाबतीत आपण फक्त खर्चाचाच विचार केला. सामान हलवणे, परत लावणे आपल्याला कोणते दिवस सोयीचे? छताला कोणता रंग? कपाटाला रंग लावायचा का? बेबीच्या भिंतीवरची फुलपाखरे इकडे लक्ष दिले नाही. फक्त

क्षेत्रफळ आणि दर चौरसचा रंग लावण्याचा रेट इतकाच विचार केला. अन्यथा अंदाज बांधणे कठीण होत जाईल खरे ना? सुलभीकरण झाले की क्षेत्रफळ $\times$ दर = खर्च हे गणितातले सूत्र वापरले म्हणजे गणिताच्या भाषेत मांडणे. जटिल प्रश्न सोडवण्यासाठी अधिक समीकरणे आणि सोडवायच्या पद्धती आणि संगणकाची मदत या सर्व बाबी असतात. मग उत्तर मिळाले समजा ५९००. तर रंग लावण्यासाठी रु. ५९०० खर्च येईल हे झाले व्यवहारातील प्रश्नाचे उत्तर.

अधिक अवघड व गुंतागुंतीच्या परिस्थितीचे गणिती रूपकाने विश्लेषण करून उत्तर काढले. मात्र मिळालेले उत्तर व्यवहारात अपुरे असेल तर? आपण प्रत्येक पायरी सुरुवातीपासून तपासत जायची. आपल्यासाठी महत्वाच्या पैलूचे पुरेसे वर्णन करत नाही आहोत का? आपले गृहीतके जास्तच सैल आहे का? मग ते नेमके करूया, कदाचित गणितातील समीकरण अवघड होईल. तरीही ते समीकरण सोडवायची पद्धत गणितातच असणार आहे ती वापरू. या पद्धतीने आपण तपासून परत सर्व प्रक्रिया करायची. मग काय परत मूळ प्रश्नाकडे जायचे अर्थात पहिल्या/अगोदरच्या फेरीतील अनुभवाची शिंदोरी घेऊन. गृहीतके नव्याने ठरवून परत प्रक्रिया सुरू!!

मी जाणीवपूर्वक गणिती पद्धती म्हटले आहे. रिती म्हटले नाही. कारण एक दृष्टीकोन आणि काही गणितातील रिती मिळून या पद्धती तयार झाल्या आहेत.

व्यवहारातील परिस्थितीचे गणिताच्या भाषेत वर्णन करावयाचे. हे वर्णन अधिक अधिक नेमके करणे ही नेहमीच व्यवहारिक गणिते सोडवायची पहिली पायरी असते. व्यवहारातील प्रश्न गणिताच्या भाषेत मांडता येतात आणि मग व्यवहारातील प्रश्न हा गणितातील प्रश्न बनतो. गणितातील प्रश्न सोडवण्यासाठी असलेली रीत वापरून त्या गणितातील प्रश्नाचे उत्तर

मिळते. अर्थात व्यवहारातून गणिताकडे येताना जो विचार केला त्याच विचाराच्या सहाय्याने गणिताच्या उत्तराचे रूपांतर आपण व्यवहारिक प्रश्नासंबंधी उत्तरात करू शकतो. मग आपल्या प्रश्नाचे उत्तर मिळाले आहे का? समाधानकारक आहे का त्याचा उपयोग प्रत्यक्षात होईल का? हे प्रश्न विचारायचे असतात. अर्थातच ज्या उद्देशाने आपण हा सर्व खटाटोप केला तो किती यशस्वी झाला हे आपण बघणारच. ही पद्धत समजून घ्यायला एक अत्यंत सोपे शालेय अभ्यासातील गणित सोडवूया.

भास्कराचार्य द्वितीय हे महान गणिती होते. त्यांचा जन्म १११४ साली झाला आणि मृत्यू ११९३ साली त्यांचा देहांत झाला. अत्यंत महत्वाचे शोध त्यांनी लावले. हे शोध त्यांच्यानंतर सुमारे ६०० वर्षाने युरोपमध्ये लागले. त्यात $kx^2 + 1 = y^2$ सोडवायची पद्धत आहे. k नैसर्गिक संख्या आहे. ब्रह्मगुप्त यांनी $91x^2 + 1 = y^2$ चे उत्तर काढले आणि भास्कराचार्यांनी वर्ग नसलेल्या नैसर्गिक संख्या k साठी पद्धत दिली. Lagrange (१७३६-१८१३) नी विशिष्ट समीकरणाचे उत्तर १७५० च्या आसपास दिले असावे. भास्कराचार्य यांचे संशोधन बीजगणित या ग्रंथात दिलेले आहे.

भास्कराचार्य या अत्यंत उत्तम गणितीची ९०० वी जयंती आपण २०१४ साली साजरी केली विविध व्याख्याने, लेखन त्या निमित्ताने झाले. अनेक चर्चा सत्रे आयोजित केली गेली. तसेच भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे तर्फे, एक आव्हानात्मक स्पर्धा परीक्षा ५वी, ६वीच्या विद्यार्थ्यांसाठी २०१४-१५ पासून घेतली जाते.

भास्कराचार्यांचा 'लीलावती' हा ग्रंथ सुप्रसिद्ध आहे. हा ग्रंथ सुमारे ६०० वर्षे पाठ्यपुस्तक म्हणून जगात ठिकठिकाणी वापरला गेला. ग्रंथाचे सुरुवातीला अरेबिक मध्ये भाषांतर झाले नंतर १६ व्या शतकात तो युरोपमध्ये पोचला. अतिशय आदराने सर्व ठिकाणी

याचे अध्ययन केले गेले. आजही आपण 'लीलावती' या शालेय गणिताचे पाठ्यपुस्तक म्हणून वापरू शकतो. लीलावतीतील १०० व्या श्लोकातील गणित आपण बघूया. ते सोडवताना कोणकोणत्या पायरींनी आपण ते सोडवले हे समजून घेऊया.

श्लोक १०० (लीलावती) (मराठीत गणित सांगतो)**
चार व्यापारी होते. त्यांपैकी एकाजवळ आठ माणके, दुसऱ्या जवळ १० इंद्रनील, तिसऱ्या जवळ १०० मोती व चौथ्या जवळ ५ हिरे होते. ते प्रवासास निघाले असताना त्यांची मैत्री जमून, त्यापैकी प्रत्येकाने आपापल्या रत्नामधून एकेक रत्न दुसऱ्यास दिले. त्यामुळे प्रत्येकाजवळील धन सारखे झाले. तर हे मित्रा(वाचक), त्या रत्नांच्या किंमती काय?

उत्तर: एका व्यवहाराविषयीचे उदाहरण आहे हे. अत्यंत दृढ मैत्र जुळल्याने त्यांनी आपल्या जवळील रत्नरूपी धन समान केले. हा तो व्यवहार.

पायरी १ : व्यवहाराचे आकलन

प्रत्येकाकडे वेगवेगळ्या प्रकारची आणि वेगवेगळ्या संख्येने रत्ने होती. आपण असे गृहीत धरू की प्रत्येकाकडे असलेले रत्न अगदी त्याच्याकडे असलेल्या अन्य रत्नाच्याच मूल्याचा आहे. सर्व इंद्रनील सारखे आहेत, सर्व मोते सारखीच आहेत याप्रमाणे. ते आपल्याकडील एक एक रत्न त्याच्या मित्रांना देतो. तर असे दिले आहे. आणि सर्वांनी असे केल्या नंतर प्रत्येकाकडे असलेल्या धनाची किंमत सारखी होते ही माहितीच फक्त नसून एक अट आहे.

विचारले आहे : प्रत्येक रत्नाची किंमत, मूल्य किती ?

आपण गणिताच्या भाषेत व्यवहार मांडायला सुरुवात केली आहे.

मनिषने प्रामाणिक पणाने 'पण मला नीट कळले नाही असे कसे काढता येईल? गणितात किंमतीचा तर

उल्लेखच नाही.' शिक्षक हसले म्हणाले "शाब्बास मनीष तुला अडलेले तू विचारलेस ते. आता तू आणि सर्वांनी, नीट लक्ष देऊन विचार समजून घ्या."

शेवटी काय झाले आहे प्रत्येकाकडे असलेले धन सारखे झाले. पहिल्याजवळ माणके होती ८, त्याने तीन जणांना तीन माणके वाटली त्याच्याकडे ५ माणके उरली. त्याला इतरांनी त्यांच्या जवळचे एक एक रत्न दिले. त्याच्याजवळ ५ माणके आणि एक एक हिरा, इंद्रनील आणि मोती आहे. याच प्रकारे प्रत्येकाकडे शेवटी किती आणि कोणती रत्ने असतील ते खालील सरिणीत दिले आहे.

	मित्र १	मित्र २	मित्र ३	मित्र ४
माणके	५	१	१	१
इंद्रणील	१	७	१	१
मोती	१	१	९७	१
हिरा	१	१	१	२

समजा हिऱ्याचे मूल्य क्ष, माणकाचे य, मोत्याचे आणि इंद्रनीला चे मूल्य इ आहे तर आपल्याला ४ समीकरणे मिळतील मात्र त्यात चार चल पद असतील.

सर्वांच्या जवळचे धन सारखे म्हणजे

$$५ \text{ माणिक मूल्य} + १ \text{ इंद्रनीलाचे मूल्य} + १ \text{ मोती किंमत} + १ \text{ हिरा} = V$$

$$१ \text{ माणिक} + ७ \text{ इंद्रनीलाचे मूल्य} + १ \text{ मोती किंमत} + १ \text{ हिरा किंमत} = V$$

$$१ \text{ माणिक किंमत} + १ \text{ इंद्रनीलाचे मूल्य} + ९७ \text{ मोती किंमत} + १ \text{ हिरा किंमत} = V$$

$$१ \text{ माणिक किंमत} + १ \text{ इंद्रनीलाचे मूल्य} + १ \text{ मोती किंमत} + ५ \text{ हिरा किंमत} = V$$

आता यात प्रत्येक समीकरणात माणिक, इंद्रनील, मोती, हिरा यांची किंमत येते. अरे बाप रे.

मात्र सर्व समीकरणामध्ये तीन रत्ने एक, एकच आहेत. आता कल्पना सुचली ना.

१ माणिक + १ इंद्रनीलाचे मूल्य + १ मोती किंमत + १ हिरा किंमत सर्व समीकरणामध्ये आहे! ही जी किंमत आहे ती सर्व समीकरणातून वजा केली तरी उरलेल्या रत्नांची किंमत सारखीच. एक करून दाखवतो;

$$(५ \text{ माणिक मूल्य} + १ \text{ इंद्रनीलाचे मूल्य} + १ \text{ मोती किंमत} + १ \text{ हिरा})$$

वजा

$$(१ \text{ माणिक मूल्य} + १ \text{ इंद्रनील मूल्य} + १ \text{ मोती मूल्य} + १ \text{ हिरा मूल्य})$$

४ माणकांची किंमत

याच पद्धतीने, ४ माणिक, ६ इंद्रनील, ९६ मोती आणि ४ हिरे उरले.

त्यांची किंमत सारखी. खेळास एकच चल पद उरले आणि गुणोत्तरे मिळाली. समजा एका मोत्याची किंमत १. तर

$$९६ = ४ \text{ माणिक, माणिकाचे मूल्य} = २४$$

$$९६ = ६ \text{ इंद्रनील, इंद्रनील चे मूल्य} = १६$$

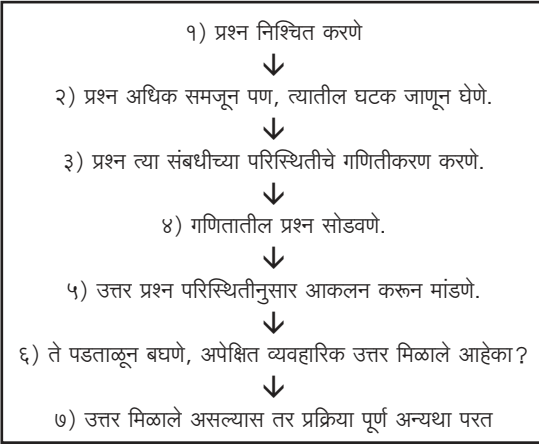
$$९६ = २ \text{ हीऱ्यांची किंमत, हिऱ्याची किंमत} = ४८$$

४ समीकरणे आणि ४ चल (variables) चे समीकरणे यांचे रूपांतर फक्त तीन गुणोत्तरात केले!

इतके सविस्तर सांगण्याचे कारण गणिती रूपकाच्या पायऱ्या आणि हे गणित किंवा कोणत्याही व्यावहारिक गणित सोडवायच्या पायऱ्या सारख्याच आहेत. आपण ताळा करतोच. आणि वरील उदहरणातून अशी अनेक उदाहरणे सोडवायची युक्ती आणि रीत कळली.

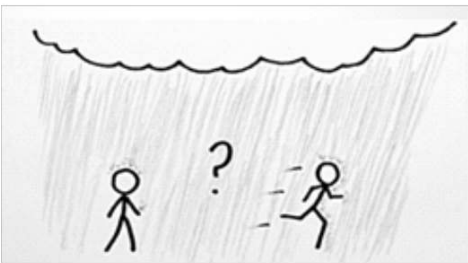
तोच आशय पुन्हा सांगणारे गणिती रूपकाचे अजून

एक ओघ पत्रक दिले आहे. ओघ पत्रकात दिलेल्या १,२,३,४ पायऱ्या आपण वरील उदाहरणात केल्या आहेतच. तसेच आलेले आकडे कोण कोणत्या रत्नाची किंमत ठरवतात हे मांडले, म्हणजेच उत्तर परिस्थितीनुसार व्यवहाराच्या नुसार मांडले. पडताळा म्हणजे रत्नांची योग्य ती किंमत समीकरणात घालून उत्तरे सारखी येतात का ते बघितले. हे गणित सोपे होते आणि ते सोडवण्यासाठी घेतलेले गृहीत अगदीच शक्य आहे. त्यामुळे आपले गणिती रूपकाचे चक्र सफल संपूर्ण होऊन थांबले!



अधिक जटिल प्रश्नांच्यात काही अधिकची गृहीते घेऊन प्रश्नाचे सुलभीकरण करावे लागते. त्यावेळी आपल्याला उपयुक्त उत्तर न मिळण्याची शक्यता असते. तिथे परत गृहीतके अधिक योग्य प्रकारे ठरवून

Is it better to run or walk in the rain, so that you will get less wet!



Why you Should Run, Not Walk, in the rain...

सर्व पायऱ्या करायच्या आहे की नाही गंमत!

आता एक गंमतीचे उदाहरण सांगतो. तुम्ही चालत आहात अचानक पाऊस सुरू झाला. तुम्हाला कमीतकमी भिजायचे आहे तर तुम्ही पळावे का एकाच वेगाने चालत राहावे? यावरही अनेक गणिती रूपके योजली आहेत. तुमचं चालायचा, पळायचा वेग, पावसाचा जमिनीशी होणार कोन, पावसाचा जोर इ. सर्वांचा विचार करायला लागेल. अशा मनोरंजक उदाहरणांपासून ते अत्यंत जटिल समस्या किंवा प्रक्रिया घडवण्यासाठी गणिती रूपकांच्या द्वारे केलेला अभ्यास महत्वाचा ठरतो.

आपण गणिती रूपक म्हणजे काय ते कोणत्या टप्प्यांनी पुढे न्यायचे एक दोन सोपी उदाहरणे समजावून घेतली आहेत. आता आपण व्यवहारातील उपयोगी माहिती करून घेऊयात. खाली दिलेले तसेच अनेक गणिती रूपकांचा अभ्यास Ph D चे विषय झाले आहेत आणि त्यांच्या वर अजूनही संशोधन चालूच आहे.

उदाहरणे :

१ कोणते अन्न किती वेळ कशा प्रकारे टिकवावे? आपला खर्च कमी होईल आणि पदार्थ चांगला राहील. हे उद्दिष्ट?

२ क्रिकेटमध्ये काय प्रकारच्या चेंडूला कसं फटका मारायचा हे शिकवणारे रूपक असते. गोलंदाज काही विशिष्ट प्रकारचे चेंडू टाकून सराव देऊ शकेल. मात्र या रूपकाद्वारे तयार केलेल्या system मधून खूप विविधता आणता येते.

३. वाहतुकीचे गणिती रूपक. यावर किमान १०० PhD झाल्या आहेत.

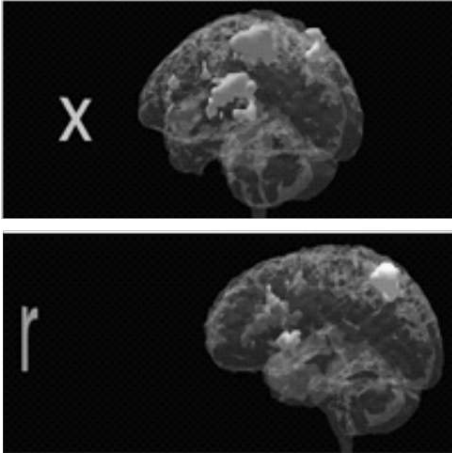
४. अर्थशास्त्रातील शेकडो रूपकांपैकी शेअर बाजाराचे रूपक हल्ली गुंतवणूकदार वापरत आहेत.

खाली काही चित्रे दिली आहेत ती गुंतागुंतीच्या

प्रक्रियासंबंधी आहेत.

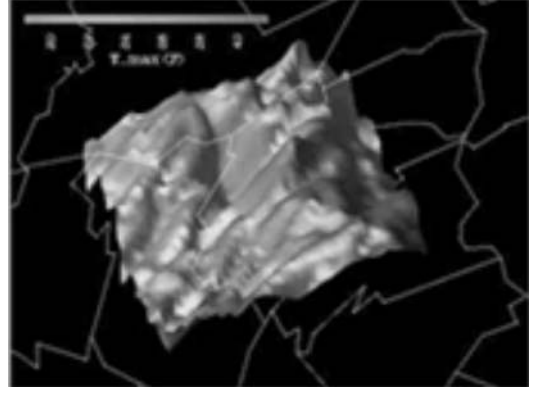


पहिले जेट विमान प्रथम गणिती रूपकांद्वारे संगणकाच्या माध्यमातून तयार केले गेले. त्याचा नेमका आकार. हवेशी कमीत कमी संघर्ष होईल अशी चोच कशी करायची हा त्यातील एक पैलू, असे अनेक पैलू गणिती रूपकांच्या सहाय्याने ठरवले गेले. प्रत्यक्ष प्रयोग करायचे तर अफाट वेळ आणि प्रचंड पैसा लागला असता त्या मानाने खूप कमी वेळात आणि पैशात गणिती रूपकाने तेच काम केले !!.



मेंदूची MRI चाचणी करून जे चित्र मिळते त्याचा योग्य अर्थ लावून डॉक्टरना उपयुक्त माहिती आणि निष्कर्ष काढणे. हे गणिती रूपकांद्वारे केले जाते.

आणि हवामानाचे निरीक्षण आणि अंदाज बांधणे हे अत्यंत आव्हानात्मक काम सध्या गणिती रूपकांच्या सहाय्यानेच पेलण्याचा प्रयत्न चालू असतो. चेष्टा बाजूला ठेवून विचार केलात तर सर्वसाधारणपणे



अंदाज, दीर्घ कालीन अंदाज बरोबर यायला लागलेत. प्रा गोवारीकर आणि त्यांच्या चमूने चमूने या कामाला, विविध पैलू एकत्रित अभ्यास करायला सुरुवात केली. आता हजारो शास्त्रज्ञ संशोधन करत आहेत.

इतके इतके उपयोग आहेत की मोजदादच करता येत नाही. कारण आपण सुरुवातीलाच बघितले आहे की सर्व व्यवहारात गणित असतेच असते. म्हणजेच गणिती रूपक पाठोपाठ येणारच !!!

एकच सांगतो, तुमचा कोणताही आवडता विषय असो त्याचे गणिती रूपक खात्रीने आहे. तुम्ही तुमच्या आंतरजालावर जाऊन 'मॅथमॅटिकल मोडेलिंग ऑफ 'आवडीचा विषय' असा शोध घ्या. आणि बघा तपासून बघा मी खरे सांगतो का खोटे ते ?

खरोखरच सर्वांभूती सदैव आहे असे काय ? या प्रश्नाचे एक उत्तर आपण "गणिती रूपक" असे ही देऊ शकतो !!

संदर्भ: चित्रे आंतर जाला वरील आहेत.

ओघपत्रक; असीम संस्थे साठी मी दिलेले व्याख्यान.

श्री भास्कराचार्य कृत लीलावती पुनरदर्शन प्रा . ना. ह. फडके , सरिता प्रकाशन जरूर वाचा.



किरण बर्वे

मोबा. ९४२३०९२०३४